کنترل گام متغیر برای یک کوادروتور با استفاده از کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی مستقیم*

مقاله علمی - پژوهشی

مریم مسلسل [۱]　　　　مهدی خدابنده [۲]

چکیده *در این مقاله به بررسی ساختار دینامیکی کوادروتور گام متغیر و طراحی کنترل‌کنندهٔ مناسب بر اساس مدل‌سازی‌های ریاضی پرداخته شده است. کوادروتور گام ثابت به دلیل ساختار دینامیکی ساده‌تر نسبت به سایر مدل‌ها بیشتر مورد توجّه تحقیقات علمی قرار گرفته است. این نوع از کوادروتورها در عین سادگی نسبی، محدودیت‌هایی نظیر کاهش مداومت پروازی و انجام مانورهای مختلف پروازی را به همراه دارند. می‌توان با استفاده از ملخ‌های گام متغیر در یک کوادروتور، محدودیت‌های یاد شده را به‌طور نسبی کاهش داد. در این مقاله، ابتدا به بررسی ویژگی‌های ملخ‌های گام متغیر در مقایسه با ملخ‌های گام ثابت برای یک کوادروتور پرداخته شده است. در ادامه از روش خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی مستقیم جهت کنترل کوادروتور گام متغیر استفاده شده است. درنهایت نیز نتایج حاصل از طرح کنترلی پیشنهادی از طریق شبیه سازی با نرم‌افزار MATLAB بررسی شده است. جهت بررسی بهتر عملکرد کنترل‌کننده‌های طراحی شده، نتایج شبیه سازی با روش‌های PID و دینامیک معکوس غیرخطی (NID) و مدلغزشی و مدلغزشی تطبیقی در شرایط تغییر جرم کوادروتور مقایسه شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که اتخاذ این راهبرد تطبیقی اجازه می‌دهد تا کوادروتور جهت‌گیری‌های زمان متغیر و دستورات ارتفاع را به‌طور دقیق‌تری، در حضور اغتشاشات و یا نامعینی‌های پارامتری، در مقایسه با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک غیر تطبیقی، دنبال کند و همچنین نشان می‌دهد که کنترل‌کننده‌های خطی سازی فیدبک تطبیقی و مدلغزشی تطبیقی به ترتیب در مقایسه با کنترل‌کننده‌های خطی سازی فیدبک، مدلغزشی، PID و NID ردیابی دقیق‌تر و با خطای کمتری دارند.*

واژه‌های کلیدی کوادروتور گام متغیر، مدل‌سازی، کنترل خطی‌سازی فیدبک، کنترل خطی‌سازی فیدبک تطبیقی مستقیم.

Variable-Pitch Control of a Quadrotor Using Feedback Linearization Controller and Direct Adaptive Feedback Linearization Controller

M. Mosalsal　　　　M. Khodabandeh

Abstract *In this paper, the dynamic structure of variable pitch quadrotor and the design of a suitable controller based on mathematical modeling have been studied. The fixed pitch quadrotor because of having a simpler dynamic structure than other models has been the focus of scientific studies. This kind of quadrotors, despite their relative simplicity, creates limitations such as shortening the flight time and various maneuvers. In this paper, at first, the characteristics of variable pitch propeller are studied and compared with the fixed pitch propeller for a quadrotor. In continue, a Feedback Linearization Controller and a Direct Adaptive Feedback Linearization Controller are used to control the Variable-Pitch quadrotor. Ultimately, the results of the proposed control are investigated via MATLAB software simulation. To better evaluate the performance of the designed controllers, the simulation results are compared with PID and Nonlinear Inverse Dynamics (NID) and Sliding Mode and Adaptive Sliding Mode controllers in the mass change condition of the quadrotor.The simulation results show that this adaptive strategy allows the quadrotor to follow variable time attitude and altitude commands more accurately, in the presence of disturbances or parameter uncertainties, compared to non-adaptive feedback linearization controllers. And also it shows that adaptive feedback linearization and adaptive sliding mode controllers have more accurate tracking with less error compared to feedback linearization, sliding mode, PID and NID controllers, respectively.*

Key Words Variable Pitch Quadrotor, Modeling, Feedback Linearization Control, Direct Adaptive Feedback Linearization Control.

* تاریخ دریافت مقاله ۹۸/۹/۱۶ و تاریخ پذیرش آن ۹۹/۶/۲۲ می‌باشد.

DOI:10.22067/fum-mech.v31i2.84510

(۱) کارشناسی ارشد ، مهندسی برق- کنترل، دانشگاه صنعتی همدان، همدان

(۲) نویسندهٔ مسئول، استادیار، مهندسی برق- کنترل، دانشگاه صنعتی همدان، همدان.

Email: khodabandeh@hut.ac.ir

مقدّمه

کوادروتورها به دلیل ابعاد کوچک، قابلیت برخاست و فرود عمودی و توانایی‌های قابل توجّه در انجام مانورهای مختلف پروازی و همچنین کاربردهای عملیاتی گسترده مورد توجّه تحقیقات علمی قرار گرفته‌اند. قابلیت‌های امنیتی حمل‌ونقل بار به همراه توانایی مانور بالا در شرایط مختلف پروازی نیز توجّه علایق تجاری را در این زمینه به خود جلب نموده است. بسته به کاربردهای خاص مورد نظر کاربران نیاز به مدل‌سازی‌های مختلف و انتخاب مناسب ابزارهای طراحی قانون کنترل ضروری به نظر می‌رسد. به‌نوبه خود، کنترل کوادروتور برای: ۱) دستیابی به پایداری، مقاوم بودن و خواص دینامیک مورد نظر، ۲) داشتن توانایی کنترل غیرخطی، ۳) داشتن قابلیت تطبیق نسبت به تغییر پارامترها و تغییرات محیطی به کنترل مناسبی نیاز دارد. هدف این است که یک روش کنترلی پیشنهاد گردد که به حالت‌های مختلف یک کوادروتور اجازه دهد تا به یک مجموعه‌ی دلخواه از حالات مرجع زمان متغیر همگرا شوند.

علی‌رغم موفقیت‌های کوادروتور معمولی که دارای چهار روتور است و هرکدام توسط تغییر سرعت موتورها به‌طور جداگانه هدایت و کنترل می‌شوند، هنوز هم محدودیت‌هایی وجود دارد. کوادروتورهای گام ثابت صرفاً توسط موتور با تغییر سرعت تفاضلی کنترل می‌شوند که ازاین‌رو پهنای باند کنترل آن توسط نیروی چرخشی موتورها محدود می‌گردد [1,2]. با افزایش ابعاد و وزن، کوادروتور دیگر نمی‌تواند صرفاً از طریق کنترل سرعت پایدار شود، زیرا ممکن است شرایطی ایجاد گردد که گشتاور مورد نیاز برای تغییر سرعت چرخش موتور از ظرفیت گشتاور تولیدی موتور فراتر رفته و درنتیجه، روش‌های کنترل پرواز فعلی برای کوادروتورهای با ابعاد بزرگ‌تر مناسب نباشد.

در کوادروتور گام متغیر، درحالی‌که ملخ‌های گام متغیر موجب افزایش پیچیدگی نسبت به کوادروتور ساده می‌شوند، مزایای افزایش پهنای باند کنترل‌کننده و اضافه کردن قابلیت‌های رانش معکوس، این طرح را با کارایی بالاتر نشان می‌دهد. درگذشته برخی شرکت‌ها ساخت و پرواز کوادروتور گام متغیر با قابلیت کنترل از راه دور را انجام داده‌اند که می‌توان به یک تلاش جدّی و سازمان‌یافته در این خصوص توسط کاتلر و همکاران اشاره کرد [1,2,3].

تحقیقات محدودی در زمینهٔ کوادروتور گام متغیر صورت گرفته است به‌طور مثال در [4] یک ربات چندمنظوره که قادر به کار در زمین، دریا و هوا است معرفی شده است. این ربات شامل یک کوادروتور با ملخ‌های گام متغیر است که وسیله را قادر می‌سازد تا علاوه بر پرواز مانند یک کوادروتور معمولی، روی زمین با یک زاویه مایل بایستد، مانند یک چرخ روی زمین بچرخد، روی آب حرکت کند و شناور بماند. به دلیل کارایی خوب این ربات از آن در زمینهٔ بلایای طبیعی استفاده شده است. در [5] به مسألهٔ تنظیم یک سیستم کنترل وضعیت آبشاری یک کوادروتور گام متغیر، با اتخاذ یک روش مبتنی بر داده سریع بر اساس یک روش تنظیم فیدبک مرجع مجازی اصلاح‌شده (Virtual Reference Feedback Tuning)VRFT پرداخته شده است. روش ارائه‌شده اجازه می‌دهد تا هر دو حلقهٔ داخلی و بیرونی با استفاده از یک مجموعهٔ واحد از داده‌های تجربی تنظیم شوند و این کنترل‌کننده سطح عملکردی قابل مقایسه با یک کنترل‌کننده H_∞ مبتنی بر مدل فراهم می‌کند. نشان داده شده است که کنترل‌کننده داده محور یک ردیابی خوب و قابلیت دفع اغتشاشات را ارائه می‌کند و درنتیجه یک راه‌حل مناسب برای استقرار سریع برای کنترل‌کننده‌های وضعیت با کارایی بالا را ارائه داده است.

در [6] به مسألهٔ طراحی کنترل مقاوم برای دینامیک‌های وضعیت یک کوادروتور گام متغیر پرداخته شده است. در [7] مشکل تنظیم یک سیستم کنترل وضعیت آبشاری یک کوادروتور گام متغیر، با مقایسهٔ دو

روش مبتنی بر دادهٔ غیر تکرارشونده، بررسی شده است. روش اوّل، روش تنظیم فیدبک مرجع مجازی VRFT درحالی‌که روش دوم، روش تنظیم بر اساس همبستگی CBT (Correlation –Based Tuning) است. هر دو روش به‌منظور تنظیم دو حلقهٔ داخلی و بیرونی، با استفاده از یک مجموعهٔ واحد از داده‌های تجربی، اصلاح شده‌اند. این روش‌ها، یک تنظیم سریع پارامترهای کنترل از داده‌ها را به‌طور مستقیم، بدون تکیه بر شناخت دقیق از دینامیک دستگاه ممکن می‌سازند. در [8] مسألهٔ طراحی قانون کنترل برای یک کوادروتور با توانمندسازی هر دو مؤلفهٔ سرعت و کنترل زمین در نظر گرفته شده است. توازن بین سرعت و کنترل گام برای اولین بار با ارجاع به یک مسألهٔ طراحی خطی بررسی شده است. سپس مسألهٔ کنترل کلی روی کنترل گام مطرح شده و به‌صورت یک حلقهٔ بیرونی (موقعیت) و یک حلقهٔ درونی (وضعیت) فرمول‌بندی شده است. اکثر کوادروتورهای امروزی گام ثابت، مداومت پروازی کوتاهی (کمتر از ۱ ساعت) دارند که تا حد زیادی کارایی‌هایشان را محدود می‌کند.

در [9] یک روش طراحی برای ساخت یک کوادروتور با پرواز طولانی‌مدّت با استفاده از روتورهای گام متغیر و یک موتور بنزینی ارائه شده است. این روش متشکل از سه مرحله است. در مرحلهٔ اوّل، پره‌های روتور و موتور بنزینی به‌عنوان یک جفت انتخاب شده‌اند، به‌طوری‌که نیروی بالابرنده (تراست) کافی می‌تواند به‌راحتی توسط موتور تأمین شود. در مرحلهٔ دوم، پیشرانه و بدنه طراحی شده‌اند. چالش عمده به حداقل رساندن لرزش بدنه و انتقال قدرت از یک موتور به چهار روتور در عین نگه‌داشتن روتورها با چرخش متضاد بوده است. درنهایت، یک کنترل‌کننده PD (Proportional Derivative) به‌منظور تسهیل پرواز اولیه تنظیم شده است. عملکرد روش به‌وسیله ساخت و پرواز کوادروتور نمونه اولیهٔ بنزینی که طوری طراحی شده است تا یک زمان پرواز از ۲ تا ۳ ساعت و حداکثر وزن برخاست ۱۰ کیلوگرم داشته باشد، بررسی شده است.

نمونه‌ای از تحقیقاتی که در زمینهٔ کنترل کوادروتور معمولی با روتورهای گام ثابت انجام شده است نیز به شرح زیر است:

در [10]، پایدارسازی زمان محدود، برای یک کوادروتور بر مبنای یک روش کنترل مد لغزشی انتگرالی تطبیقی ارائه شده است.

در [11] کنترل مد لغزشی مبتنی بر روش برگشت به عقب کوادروتور با حذف اثر اغتشاش بار و تخمین اینرسی به روش تطبیقی ارائه شده است. در [12] یک کنترل‌کننده مبتنی بر خطی‌سازی فیدبک با یک ناظر حالت لغزشی مرتبهٔ بالا که به‌طور موازی در حال اجرا است، به یک کوادروتور اعمال شده است. در [13] یک کنترل‌کننده مقاوم و پایدار جدید برای وضعیت کوادروتور ارائه شده که ترکیبی از خطی سازی فیدبک و استراتژی کنترل LQR (Linear Quadratic Regulator) است. این روش در ابتدا برای پایدارسازی وضعیت کوادروتور در برابر اغتشاش استفاده شده است. شبیه سازی‌ها نشان‌دهنده پایداری و مقاوم بودن سیستم کنترل در شرایط نامی است. علاوه بر این، یک اغتشاش محدود به سیستم در حالت پرواز اضافه‌شده و نتایج نشان‌دهندهٔ رفتار موفق کنترل‌کنندهٔ پیشنهادی بوده است.

قبلاً، نیز رویکردهایی مانند کنترل PID (Proportional-Integral-Derivative) [14]، کنترل مد لغزشی [15]، کنترل پسگام [16]، کنترل تطبیقی [17,18]، دینامیک معکوس غیرخطی NID (Nonlinear Inverse Dynamics) [19] و خطی‌سازی فیدبک [20] برای طراحی کنترل‌کنندهٔ کوادروتورهای معمولی مطرح شده است، اما این رویکردها تاکنون برای کوادروتور گام متغیر استفاده نشده است که در این تحقیق به بررسی یکی از این رویکردها که خطی‌سازی فیدبک تطبیقی است پرداخته می‌شود.

تحقیق حاضر توسعهٔ یک مدل دینامیکی پرواز برای

کوادروتور گام متغیر را بررسی می‌نماید. تئوری عنصر تیغهٔ CBT همراه با تئوری مومنتوم برای تخمین تراست و گشتاور هر یک از روتورها به‌عنوان عملکرد زاویه‌ای تیغه جهت توسعهٔ یک مدل مکانیکی پرواز ساده استفاده می‌شود و از کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی مستقیم جهت کنترل کوادروتور گام متغیر استفاده می‌شود. به‌طورکلّی این تحقیق دو موضوع را مد نظر دارد: ۱) ایجاد مدل دینامیکی برای کوادروتور گام متغیر و ۲) طراحی یک کنترل‌کنندهٔ خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی برای پایدارسازی و ردیابی مسیر در برابر تغییرات مدل سیستم.

ساختار کلّی مقاله به‌صورت زیر است:

در بخش ۲ به بیان ویژگی های کوادروتور گام متغیر اشاره شده است. در بخش ۳ نحوهٔ مدل سازی کوادروتور گام متغیر به‌طور کامل بیان گردیده است و در بخش ٤ به طراحی کنترل‌کنندهٔ خطی‌سازی فیدبک و طراحی کنترل‌کنندهٔ خطی سازی فیدبک تطبیقی پرداخته شده است. در بخش ۵ نتایج حاصل از شبیه‌سازی کوادروتور گام متغیر با کنترل‌کننده‌های پیشنهادی ذکر شده است. در این بخش مقایسه عملکرد کنترل‌کننده‌های طراحی شده با کنترل PID و NID نیز انجام شده است. نهایتاً در بخش ٦ نتیجه‌گیری ارائه شده است.

ویژگی‌های کوادروتور گام متغیر

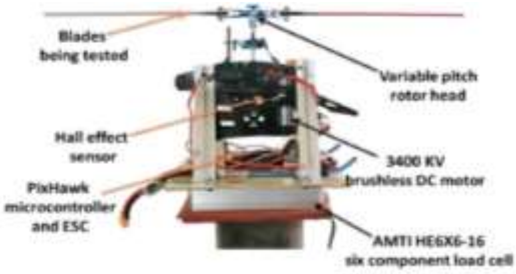
در ابتدا به بیان معنی گام متغیر در کوادروتور گام متغیر پرداخته می‌شود. اصطلاح گام از فاصله بین دو دندانه یک پیچ گرفته شده است، به‌نحوی‌که با یک دور چرخش پیچ به میزان یک دندانه در امتداد محور عمود بر آن، حرکت به میزان یک گام اتفاق می‌افتد. در سیستم‌هایی با ملخ دوار مثل کوادروتور گام از زاویهٔ ملخ‌های کوادروتور نسبت به هم حاصل می‌شود. در کوادروتورگام ثابت امکان تغییر زاویهٔ ملخ‌های روتورها وجود ندارد و زاویهٔ ملخ‌های روتورها ثابت است و تنها با کم‌وزیاد شدن سرعت آن‌ها می‌توان نحوهٔ حرکت کوادروتور را کنترل نمود. این در حالی است که گام متغیر به معنای امکان تغییر زاویهٔ ملخ‌های روتور است. در کوادروتور گام متغیر، سرعت روتورها ثابت و با تغییر زاویهٔ ملخ‌های روتورها حرکت کوادروتور کنترل می‌شود.

یک ملخ گام متغیر، یک نوع سیستم با بهره‌گیری از یک طرز کار مکانیکی برای تغییر گام ملخ‌های روتور است [21] که در کوادروتور گام متغیر مورد استفاده قرار گرفته‌است که ویژگی‌هایی را برای کوادروتور گام متغیر در مقایسه با کوادروتور گام ثابت به ارمغان آورده است.

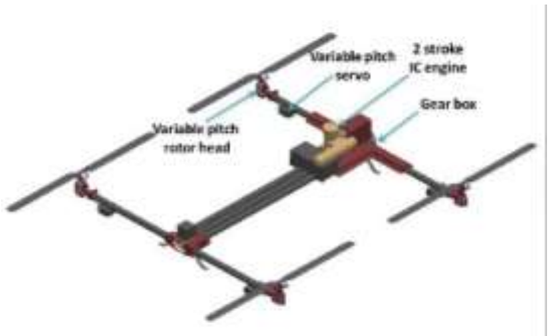
ویژگی‌های ناشی از اضافه کردن ملخ‌های گام متغیر به کوادروتور [22] عبارت‌اند از:

۱. در مقایسه با کوادروتور معمولی که با تغییر سرعت روتورها کنترل می‌شود، در کوادروتور گام متغیر برای کنترل از تغییر زاویهٔ گام روتور استفاده می‌شود که پهنای باند کنترلی بزرگ‌تری را فراهم می‌کند؛
۲. اجازهٔ استفاده از موتورهای بنزینی را می‌دهد که سبب افزایش چشمگیر مداومت پروازی آن در مقایسه با کوادروتور با تغذیهٔ باتری می‌شود؛
۳. امکان ایجاد نیروی معکوس توسط روتورها که باعث چابکی بیشتر و مانورپذیری و تحمل در برابر باد می‌شود و پرواز وارونه را به علّت ایجاد نیروی منفی امکان‌پذیر می‌کند؛
٤. توسط تغییر زاویهٔ تجمعی ملخ‌های روتور کنترل می‌شود.
۵. همهٔ روتورها در یک سرعت راه‌اندازی می‌شوند.

در شکل (۱) ساختار روتور با ملخ‌های گام متغیر نشان داده شده است و در شکل (۲) نمایی از ساختار یک کوادروتور گام متغیر نشان داده شده است.



شکل (۱): ساختار روتور با ملخ‌های گام متغیر [22]



شکل (۲): نمایی از ساختار یک کوادروتور گام متغیر [22]

شباهت کوادروتور گام متغیر با کوادروتور معمولی عبارت است از:

۱. کنترل اولیه از طریق تغییر در نیروی روتور ها به دست می‌آید.

تفاوت های کوادروتور گام متغیر با کوادروتور معمولی عبارت است از:

۱. تغییر در گشتاور به‌وسیله تغییر در زاویهٔ تجمعی ملخ‌های روتورها به دست می‌آید؛

۲. همهٔ روتور ها در یک سرعت نامی راه‌اندازی می‌شوند.

برخی از محدودیت‌های کنترل گام ثابت، صرف‌نظر از کنترل‌کننده، مربوط به ساختار مکانیکی است. بدیهی است مکانیزم‌های پیچیده‌تر، از جمله طراحی کوادروتور با کنترل گام متغیر، از نظر طراحی و ساخت مکانیکی دارای مزایایی هستند که البته نیازمند طراحی کنترل متناسب نیز می‌باشند. هدف اصلی از بیان عبارات فوق این است که برای داشتن کوادروتور با قابلت مانور بالاتر، استفاده از کوادروتور با گام متغیر نیاز است.

مواردی مانند اشباع عملگر برای هر دو نوع کوادروتور ممکن است رخ دهد. در کوادروتور گام ثابت، اشباع عملگر رسیدن سرعت روتورها به محدودهٔ حداکثر سرعت خود و برای کوادروتور گام متغیر، اشباع عملگر به معنی رسیدن زاویهٔ ملخ‌ها به حداکثر میزان ممکن تغییرات زاویه است. به‌طورکلّی برای کوادروتورهای گام ثابت در مقایسه با کوادروتورهای گام متغیر در پروازهای با مانور شدید و تغییرات ناگهانی جهت و موقعیت، برای تبعیت از ورودی مرجع احتمال به اشباع رفتن بیشتر شده که کُندی پاسخ یا عملکرد نسبتاً نامناسب ردیابی را به دنبال خواهد داشت. این امر در کوادروتورهای گام متغیر نوعاً کمتر اتّفاق می‌افتد.

مدل‌سازی کوادروتور گام متغیر

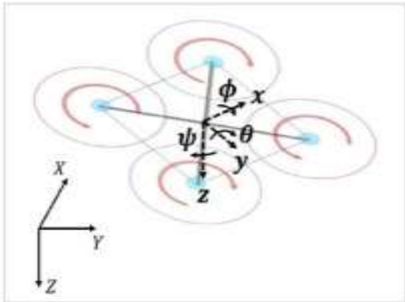
در این بخش، ابتدا روش کنترل کوادروتور گام متغیر که به‌طور قابل توجّهی متفاوت از کوادروتور معمولی مبتنی بر پروانه‌های گام ثابت است، مورد بررسی قرار گرفته و معادلات نیوتن- اویلر شش درجه آزادی (Six Degrees of Freedom) کوادروتور گام متغیر استخراج می‌شود.

روشی برای کنترل [23,24]

کنترل اولیهٔ حرکت‌های مختلف (سه حرکت رول، پیچ و یاو) با تغییر نیروی روتورهای مختلف در ترکیب‌های مختلف به دست آمده است. این قضیه برای کنترل کوادروتور با کنترل گام متغیر نیز صدق می‌کند. تغییر در نیرو برای هر روتور با تغییر زاویهٔ گام روتور مربوطه از تمام پروانه‌ها است. لازم به یادآوری است که تمام روتورها با همان سرعت نامی عمل می‌کنند که در مقدار مشخص‌شده برای تنظیم مقدار پایهٔ رانش تنظیم می‌شود. حرکت به بالا و پایین به‌راحتی با افزایش یا کاهش زاویه‌های گام برای تمام روتورها به‌طور هم‌زمان و کلّی، کنترل می‌شود.

حرکت‌شناسی [23-25]

برای توصیف دینامیک بدنه صلب، دو مختصات برای سیستم کوادروتور، مشابه شکل (۳)، استفاده شده است:



شکل (۳): دستگاه مختصات استفاده شده برای توسعهٔ رابطهٔ حرکت [23]

مختصات بدنه ثابت و اینرسیایی تمام مقادیر فیزیکی بین دو سیستم مختصات با استفاده از زوایای کلاسیک اویلر (φ,θ,ψ) (رول، پیچ، یاو) (Roll, Pitch, Yaw) تغییر می‌کنند. عبارت زیر بیانگر سرعت کوادروتور در این دو مختصات است.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=R\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix} \qquad (۱)$$

$$R=\begin{bmatrix}C\theta C\psi & S\phi S\theta C\psi-C\phi S\psi & C\phi S\theta C\psi+S\phi S\psi\\ C\theta S\psi & S\phi S\theta CS\psi-C\phi C\psi & C\phi S\theta S\psi+S\phi C\psi\\ -S\theta & S\phi C\theta & C\phi C\theta\end{bmatrix}$$

جایی که $s\,\beta\triangleq\sin\beta$ و $c\,\beta\triangleq\cos\beta$ هستند. (u,v,w) سرعت اجزا در مختصات بدنه و (x,y,z) عناصر سرعت در مختصات اینرسیایی است. به‌طور مشابه، عبارت زیر، نرخ بدنه را به نرخ زاویهٔ اویلر مربوط می‌کند. (pq,r) سرعت‌های زاویه‌ای در مختصات بدنه هستند.

$$\begin{bmatrix}\dot\phi\\\dot\theta\\\dot\psi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{S\phi S\theta}{C\theta} & \frac{C\phi S\theta}{C\theta}\\ 0 & C\phi & -S\phi\\ 0 & \frac{S\phi}{C\theta} & \frac{C\phi}{C\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix} \qquad (۲)$$

معادلات دینامیکی کوادروتور گام متغیر

رابطهٔ بدنه کوادروتور را می‌توان با استفاده از قوانین مومنتوم خطی و پایستگی زاویهٔ حرکتی به دست آورد [23-36]. نیروهایی که بر یک کوادروتور عمل می‌کنند می‌توانند به‌عنوان مجموع نیروی گرانشی، نیروهای آیرودینامیکی و نیروهای دافعه در نظر گرفته شوند. در حال حاضر، نیروهای پیش‌ران (نیرو و گشتاور موتور) و نیروهای گرانشی، نیروهای غالب فرض می‌شوند. نیروهای آیرودینامیک (مانند بالابر و کشش) که روی بدنه عمل می‌کنند، چون بسیار کوچک هستند، نادیده گرفته می‌شوند.

معادلات حرکت خطی مرکز ثقل برابر است با:

$$\begin{bmatrix}\dot u\\\dot v\\\dot w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-\frac{T}{m}\end{bmatrix}+R\begin{bmatrix}0\\0\\g\end{bmatrix} \qquad (۳)$$

که m جرم کوادروتور و g ثابت‌گرانشی زمین است. در اینجا، $T=u_1$ تراست ناشی از کل روتورها است. رابطهٔ (٤) دینامیک انتقالی کوادروتور را در محور مختصات ثابت بیان می‌کند. به‌طور مشابه، دینامیک انتقالی می‌تواند در مختصات اینرسیایی به‌صورت زیر بیان شوند.

$$\begin{bmatrix}\ddot x\\\ddot y\\\ddot z\end{bmatrix}=R^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\-\frac{u_1}{m}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\g\end{bmatrix} \qquad (٤)$$

توجّه داشته باشید که دینامیک‌های انتقالی در هر دو مختصات بدنه و اینرسیایی برای کاربرد آن در طراحی کنترل ارائه شده‌اند. می‌توان فرض کرد که کوادروتور نسبت به محورهای x و y متقارن باشد. دینامیک چرخشی به شرح زیر است.

$$\begin{bmatrix}\dot p\\\dot q\\\dot r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{I_y-I_z}{I_x}qr+\frac{J_r\omega_r}{I_x}q\\ \frac{I_z-I_x}{I_y}pr-\frac{J_r\omega_r}{I_y}p\\ \frac{I_x-I_y}{I_z}pq+\frac{J_r\omega_r}{I_z}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{I_x}u_2\\ \frac{1}{I_y}u_3\\ \frac{1}{I_z}u_4\end{bmatrix} \qquad (۵)$$

روابط (۲)، (۳)، (٤) و (٥) با هم نشان‌دهندۀ رابطۀ کامل شش درجۀ آزادی برای کوادروتور گام متغیر هستند. درنتیجه مدل نهایی کوادروتور گام متغیر [27,28] به‌صورت زیر است:

$$\ddot{x}=\frac{u_1}{m}(\cos(\varphi)\sin(\theta)\cos(\psi)+\sin(\varphi)\sin(\psi))$$

$$\ddot{y}=\frac{u_1}{m}(\cos(\varphi)\sin(\theta)\sin(\psi)-\sin(\varphi)\cos(\psi))$$

$$\ddot{z}=\frac{u_1}{m}(\cos(\varphi)\cos(\theta))-g$$

$$\ddot{\varphi}=\dot{\theta}\dot{\psi}\frac{I_y-I_z}{I_x}+\frac{J_r}{I_x}\dot{\theta}\omega_r+\frac{l}{I_x}u_2$$

$$\ddot{\theta}=\dot{\psi}\dot{\varphi}\frac{I_z-I_x}{I_y}-\frac{J_r}{I_y}\dot{\varphi}\omega_r+\frac{l}{I_y}u_3$$

$$\ddot{\psi}=\dot{\varphi}\dot{\theta}\frac{I_x-I_y}{I_z}+\frac{1}{I_z}u_4 \qquad (٦)$$

$$\varphi,\theta,\psi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \text{ و } \omega_r=\omega_1-\omega_2+\omega_3-\omega_4$$

I_x,I_y,I_z به ترتیب مومنتوم های اینرسی در راستای محورهای x,y,z بوده و l طول هر روتور تا مرکز جرم کوادروتور است. ω_r باقیماندۀ کلّی سرعت زاویه‌ای روتورها است و ω_i $i=1,2,3,4$ سرعت زاویه‌ای روتور i ام است که در کوادروتور گام متغیر چون همۀ روتورها در یک سرعت زاویه‌ای ثابت راه‌اندازی می‌شوند مقدار ω_r برابر صفر خواهد بود.

مومنتوم‌های روی بدنه کوادروتور گام متغیر به‌طور قابل توجّهی کوچک هستند و هیچ مومنتوم ژیروسکوپی که روی وسیله عمل کند وجود ندارد زیرا سرعت همۀ روتورها یکی است و دو روتور در یک جهت می‌چرخند و دو روتور دیگر در خلاف جهت می‌چرخند که باعث تعادل مومنتوم های ژیروسکوپی می‌شود.

درنتیجه با توجّه به مطالب ذکر شده مدل ساده‌شدۀ کوادروتور گام متغیر به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\ddot{x}=\frac{u_1}{m}(\cos(\varphi)\sin(\theta)\cos(\psi)+\sin(\varphi)\sin(\psi))$$

$$\ddot{y}=\frac{u_1}{m}(\cos(\varphi)\sin(\theta)\sin(\psi)-\sin(\varphi)\cos(\psi))$$

$$\ddot{z}=\frac{u_1}{m}(\cos(\varphi)\cos(\theta))-g$$

$$\ddot{\varphi}=\dot{\theta}\dot{\psi}\frac{I_y-I_z}{I_x}+\frac{l}{I_x}u_2$$

$$\ddot{\theta}=\dot{\psi}\dot{\varphi}\frac{I_z-I_x}{I_y}+\frac{l}{I_y}u_3$$

$$\ddot{\psi}=\dot{\varphi}\dot{\theta}\frac{I_x-I_y}{I_z}+\frac{1}{I_z}u_4 \qquad (٧)$$

$$\varphi,\theta,\psi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

معادلات دینامیکی روتور

معادلات تعادل تراست و مومنتوم برای پیکربندی H (مشابه پیکربندی"X") در مورد وضعیت به دست آمده است که در زیر نشان داده شده است. تئوری عنصر تیغۀ همراه با تئوری مومنتوم برای محاسبۀ تراست و گشتاور هر روتور به‌عنوان تابع ضریب تراست استفاده می‌شود [23,24,29].

برای کوادروتور معمولی، متغیر فرمان های کنترلی پرنده که از تغییرات مقدار تراست و گشتاور مجموعۀ پیشران به دست می‌آیند به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=K_c\begin{bmatrix}{\omega_1}^2\\{\omega_2}^2\\{\omega_3}^2\\{\omega_4}^2\end{bmatrix}$$

$$K_c=\begin{bmatrix}lb & lb & lb & lb\\0 & -lb & 0 & lb\\lb & 0 & -lb & 0\\-d & d & -d & d\end{bmatrix} \qquad (٨)$$

متغیرهای b و d به ترتیب ضریب اصطکاک و ضریب تصحیح نیرو به گشتاور هستند.

برای کوادروتور گام متغیر فرمان‌های کنترلی که از تغییرات مقدار تراست و گشتاور مجموعۀ پیشران به دست می‌آیند به‌صورت زیر است:

$$u_1=K\left(C_{T_1}+C_{T_2}+C_{T_3}+C_{T_4}\right)$$

$$u_2=Kd\left(C_{T_1}-C_{T_2}-C_{T_3}+C_{T_4}\right)$$

$$u_3=Kd\left(C_{T_1}+C_{T_2}-C_{T_3}-C_{T_4}\right)$$

$$u_4 = \frac{KR}{\sqrt{2}}\left(C_{T_1}^{\frac{3}{2}} - C_{T_2}^{\frac{3}{2}} + C_{T_3}^{\frac{3}{2}} - C_{T_4}^{\frac{3}{2}}\right) \tag{۹}$$

که ρ، R، و d به ترتیب برابر ضریب فضا، شعاع روتور و طول بازوی کوادروتور و $v_{tip} = \omega R$، $K = \rho\pi v_{tip}^2 R^2$ و $T_i = \rho\pi v_{tip}^2 R^2 C_{T_i}$ است. ω سرعت زاویه‌ای روتور است. C_{T_i} ضریب تراست i امین روتور (i = 1,2,3,4) است. رابطهٔ بین ضریب تراست، CT، از هر روتور و زاویهٔ گام تجمعی روتور (θ_0) برای یک تیغه بازه مستطیل شکل می‌تواند با استفاده از نظریهٔ عنصر تیغه و حرکت به دست آید:

$$\theta_{0_i} = \frac{6C_T}{\sigma C_{l\alpha}} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{C_T}{2}} \tag{۱۰}$$

که $\sigma = \frac{N_b C}{\pi R}$ است، N_b تعداد تیغه‌ها است و C طول وتر ملخ روتور، $C_{l\alpha}$، ضریب نیروی تراست است.

$$\begin{bmatrix}\dot{C}_{T_1}\\ \dot{C}_{T_2}\\ \dot{C}_{T_3}\\ \dot{C}_{T_4}\end{bmatrix} = Th^{-1}\begin{bmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\\ \dot{u}_3\\ \dot{u}_4\end{bmatrix} \tag{۱۱}$$

جایی که Th ماتریس ضریب تراست و به شرح زیر است:

$$Th = \begin{bmatrix} K & K & K & K\\ Kl & -Kl & -Kl & Kl\\ Kl & Kl & -Kl & -Kl\\ \frac{3KR}{2}\sqrt{\frac{C_{T_1}}{2}} & -\frac{3KR}{2}\sqrt{\frac{C_{T_2}}{2}} & \frac{3KR}{2}\sqrt{\frac{C_{T_3}}{2}} & \frac{3KR}{2}\sqrt{\frac{C_{T_4}}{2}}\end{bmatrix} \tag{۱۲}$$

هنگامی که ورودی کنترل مجازی $U = [\dot{C}_{T_1}, \dot{C}_{T_2}, \dot{C}_{T_3}, \dot{C}_{T_4}]^T$ به دست می‌آید، با دینامیک‌های سیستم ادغام می‌شود تا ضرایب تراست به دست آید. برای ضرایب تراست داده شده، می‌توان زاویهٔ گام دلخواه را با حل رابطهٔ (۱۰) برای هر روتور به دست آورد.

مواجهه با زیر تحریکی

کوادروتور به دلیل داشتن ٦ خروجی در ازای ٤ ورودی کنترل جزء مسائل زیر تحریک است. به‌بیان‌دیگر با توجه به معادلات فضای حالت کوادروتور که در رابطهٔ (٦) شرح داده شده است، چهار حالت کوادروتور که بیانگر ارتفاع و وضعیت $(z, \varphi, \theta, \psi)$ آن می‌باشند به‌طور مستقیم با ورودی‌های (u_1, u_2, u_3, u_4) کنترل می‌شوند اما جهت کنترل حالت‌های (x,y) ورودی مستقل وجود ندارد. برای مواجهه با زیرتحریکی، ورودی‌های مجازی در معادلات موقعیت کوادروتور تعیین شده است که تعیین آن‌ها توسط کنترل‌کننده منجر به تعیین رفتار ایده‌آل وضعیت کوادروتور می‌شود.

ورودی‌های مجازی به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$u_x = \frac{u_1}{m}(\cos(\varphi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\varphi)\sin(\psi))$$
$$u_y = \frac{u_1}{m}(\cos(\varphi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\varphi)\cos(\psi))$$
$$u_z = \frac{u_1}{m}(\cos(\varphi)\cos(\theta)) - g$$
$$u_1 = \frac{m}{(\cos(\varphi)\cos(\theta))}(u_z + g)$$
$$\phi_c = \sin^{-1}\left(\frac{m}{u_1}u_x\sin\psi - \frac{m}{u_1}u_y\cos\psi\right)$$
$$\theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{m}{u_1}u_x\cos\psi + \frac{m}{u_1}u_y\sin\psi\right) \tag{۱۳}$$

طراحی کنترل‌کننده

طراحی کنترل خطی‌سازی فیدبک برای کوادروتور گام متغیر

ازآنجایی‌که کوادروتور یک سیستم زیرتحریک است باید ٤ خروجی برای کنترل انتخاب شوند که در اینجا متغیر های خروجی به‌صورت x، y، z و ψ در نظر گرفته می شوند. [18]، [30] به این صورت با توجّه به معادلات کوادروتور مشاهده می گردد که u_2 و u_3 در معادلات حالت خروجی های انتخابی ظاهر نمی گردد. بنابراین برای ظاهر شدن این عبارات باید از معادلات مشتق گرفته شود، درنتیجه طراحی کنترل کنندهٔ خطی سازی فیدبک محاسبات پیچیده شده و در مقابل نویز حساس خواهد بود. برای کاهش مشتق‌گیری‌های

پیچیده، با فرض کوچک بودن ψ و فرض تقارن و $\omega_r = 0$، معادلات حالت ساده‌شده و به‌صورت معادلات (١٤) و (١٥) به دست می‌آیند.

$$\ddot{x} = \frac{u_1}{m}(\cos(\varphi)\sin(\theta))$$

$$\ddot{y} = \frac{u_1}{m}(-\sin(\varphi))$$

$$\ddot{z} = \frac{u_1}{m}(\cos(\varphi)\cos(\theta)) - g$$

(١٤)

$$\ddot{\varphi} = \frac{l}{I_x}u_2$$

$$\ddot{\theta} = \frac{l}{I_y}u_3$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_z}u_4$$

(١٥)

رفتار متغیرهای حالت باقی مانده φ و θ بعد از کنترل x، y، z و ψ تنها به ورودی‌های کنترلی u_2 و u_3 وابسته است.

با توجّه به معادلات مربوط به x، y، z و ψ در روابط (١٤) و (١٥) بردار درجات نسبی برابر است با $\{r_1, r_2, r_3, r_4\} = \{3,3,3,3\}$. مجموع درجات نسبی ١٢ است، بااین‌حال ابعاد سیستم برابر ١٦ است. بنابراین این کنترل‌کنندهٔ دینامیک صفر خواهد داشت و باید پایداری این دینامیک‌های صفر تحلیل شوند. طبق نکتهٔ ١ در [13] برای اجتناب از دینامیک صفر، دو انتگرال‌گیر بر سر راه u_1 قرار می‌گیرد. با هر انتگرال‌گیر ابعاد سیستم یک واحد افزایش و $\{r_2, r_3, r_4\}$ نیز هرکدام یک واحد افزایش دارند و درنهایت درجات نسبی با ابعاد سیستم برابر خواهند شد.

$\{r_1, r_2, r_3, r_4\} = \{3,5,5,5\}$

برای دستیابی به کنترل‌کنندهٔ موقعیت x,y و z از معادلات (١٤) تا جایی مشتق گرفته می‌شود که u_2 و u_3 ظاهر شوند. در این حالت در مشتق دوم روابط $u_2 = \frac{I_x\ddot{\varphi}}{l}$ و $u_3 = \frac{I_y\ddot{\theta}}{l}$ ظاهر خواهند شد. مشتقات معادلات (١٤) به‌صورت معادلات (١٦) خواهد بود و به‌صورت ماتریسی به‌صورت رابطهٔ (١٩) نوشته می‌شوند و ورودی‌های کنترلی سیستم تعمیم‌یافته رابطهٔ (٢٠) است که ورودی‌های کنترلی کمکی و دینامیک‌های خطا به ترتیب به‌صورت معادلات (١٧) و (١٨) هستند.

$$x^{(3)} = \left(\frac{1}{m}\right)(\dot{u}_1\cos\varphi\sin\theta - u_1\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta + u_1\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi)$$

(١٦)

$$x^{(4)} = \left(\frac{1}{m}\right)(\ddot{u}_1\cos\varphi\sin\theta - 2\dot{u}_1\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta + 2\dot{u}_1\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - u_1\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\varphi + u_1\ddot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - u_1\ddot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta - u_1\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\theta - 2u_1\dot{\varphi}\sin\varphi\dot{\theta}\cos\theta)$$

$$y^{(3)} = \left(-\frac{1}{m}\right)(-\dot{u}_1\sin\varphi - u_1\dot{\varphi}\cos\varphi)$$

$$y^{(4)} = \left(-\frac{1}{m}\right)(\ddot{u}_1\sin\varphi + 2\dot{u}_1\dot{\varphi}\cos\varphi - u_1\dot{\varphi}^2\sin\varphi + u_1\ddot{\varphi}\cos\varphi)$$

$$z^{(3)} = \left(\frac{1}{m}\right)(\dot{u}_1\cos\theta\cos\varphi - u_1\dot{\theta}\sin\theta\cos\varphi - u_1\dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi)$$

$$z^{(4)} = \left(\frac{1}{m}\right)(\ddot{u}_1\cos\theta\cos - 2\dot{u}_1\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\theta - 2\dot{u}_1\dot{\theta}\cos\varphi\sin\theta - u_1\ddot{\varphi}\sin\varphi\cos\theta - u_1\cos\theta\cos\varphi(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) - u_1\ddot{\theta}\cos\varphi\sin\theta + 2u_1\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta)$$

$$v_1 = x_d^{(4)} - k_{x1}e_x^{(3)} - k_{x2}\ddot{e}_x - k_{x3}\dot{e}_x - k_{x4}e_x$$

$$v_2 = y_d^{(4)} - k_{y1}e_y^{(3)} - k_{y2}\ddot{e}_y - k_{y3}\dot{e}_y - k_{y4}e_y$$

$$v_3 = z_d^{(4)} - k_{z1}e_z^{(3)} - k_{z2}\ddot{e}_z - k_{z3}\dot{e}_z - k_{z4}e_z$$

(١٧)

$$e_x^{(4)} - k_{x1}e_x^{(3)} - k_{x2}\ddot{e}_x - k_{x3}\dot{e}_x - k_{x4}e_x = 0$$

$$e_y^{(4)} - k_{y1}e_y^{(3)} - k_{y2}\ddot{e}_y - k_{y3}\dot{e}_y - k_{y4}e_y = 0$$

$$e_z^{(4)} - k_{z1}e_z^{(3)} - k_{z2}\ddot{e}_z - k_{z3}\dot{e}_z - k_{z4}e_z = 0$$

(١٨)

که در آن $k_{ij}, i = \{x, y, z\}, j = \{1,2,3,4\}$ بهره‌های انتخابی برای دستیابی به دینامیک خطای پایدار در سیستم ساده شده هستند و $e_i = i - i_d\ i = \{x, y, z\}$ تعریف می‌شود.

$$\begin{bmatrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (۱۹)$$

$$B_{11} = \left(\frac{1}{m}\right)\big(-\ 2\dot{u}_1\,\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta + 2\dot{u}_1\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - u_1\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\varphi - u_1\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\theta - 2u_1\dot{\varphi}\sin\varphi\dot{\theta}\cos\theta\big)$$

$$B_{21} = \left(-\frac{1}{m}\right)\left(2\dot{u}_1\dot{\varphi}\cos\varphi - u_1\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)$$

$$B_{31} = \left(\frac{1}{m}\right)\big(-2\dot{u}_1\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\theta - 2\dot{u}_1\,\dot{\theta}\cos\varphi\sin\theta - u_1\cos\theta\cos\varphi\left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right) + 2u_1\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta\big)$$

$$A_{11} = \left(\frac{1}{m}\right)\cos\phi\sin\theta$$

$$A_{12} = \left(\frac{1}{m}\right)u_1\sin\phi\cos\theta\frac{l}{I_x}$$

$$A_{13} = \left(\frac{1}{m}\right)u_1\cos\theta\cos\phi\frac{l}{I_y}$$

$$A_{21} = \left(\frac{1}{m}\right)\cos\theta\cos\phi$$

$$A_{22} = -\left(\frac{1}{m}\right)u_1\cos\phi\frac{l}{I_x}$$

$$A_{23} = 0$$

$$A_{31} = \left(\frac{1}{m}\right)\cos\theta\cos\phi$$

$$A_{32} = -\left(\frac{1}{m}\right)u_1\cos\theta\sin\phi\frac{l}{I_x}$$

$$A_{33} = -\left(\frac{1}{m}\right)u_1\sin\theta\cos\phi\frac{l}{I_y}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 \\ A21 & A22 & A23 \\ A31 & A32 & A33 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -B_{11} + v_1 \\ -B_{21} + v_2 \\ -B_{31} + v_3 \end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

با توجّه به محدودهٔ عملکرد معکوس ماتریس استفاده شده در رابطهٔ (۲۰) وجود دارد. برای کنترل ψ یک کنترل‌کننده PD به‌صورت (۲۱) در نظر گرفته می‌شود که در آن $k_{\psi1}$ و $k_{\psi2}$ به ترتیب بهره‌های مشتقی و تناسبی هستند که در شبیه‌سازی برابر ۱ در نظر گرفته شده‌اند.

$$u_4 = \ddot{\psi}_d + k_{\psi1}\left(\dot{\psi}_d - \dot{\psi}\right) + k_{\psi2}\left(\psi_d - \psi\right) \quad (۲۱)$$

کنترل‌کننده خطی‌سازی فیدبک تطبیقی مستقیم

ازآنجاکه حذف دقیق دینامیک های غیرخطی، همان‌طور که در خطی‌سازی فیدبک نیاز است، در حالت عملی دشوار بوده و به‌علاوه پارامترهای سیستم می‌تواند متغیر با زمان باشد. برای این کار یک روش کنترلی تطبیقی غیرخطی مستقیم ارائه می گردد. پایداری مجانبی این روش توسط یک متغیر مبتنی بر تئوری لیاپانوف اثبات شده است.

روش تطبیقی، عملکرد خطی سازی فید بک را مستقیماً تو سط کاهش خطای ردیابی بهبود می‌بخشد. این کار با اصلاح پارامتر ها و درنهایت بهره های کنترل‌کننده، مبتنی بر خطای ردیابی انجام می شود. هدف کنترل‌کننده، کاهش خطای ردیابی است، نه لزوماً خطای تخمین پارامتر ها. بااین حال اگر ورودی ها به‌اندازه‌ی کافی غنی باشند، مقادیر صحیح پارامترها نیز در تخمین به دست خواهند آمد.

کنترل خطی سازی فیدبک تطبیقی. سیستم مکانیکی به‌صورت زیر تعریف می شود که M و C توابع غیر خطی بوده که نسبت به پارامترهای p خطی هستند و دینامیک‌های سیستم را توصیف می‌کنند [۳۲,۳۱] x حالت‌ها و τ گشتاورهای ورودی است:

$$\tau = M(x, p)\ddot{x} + C(x, \dot{x}, p) \quad (۲۲)$$

ماتریس اثر جرمی و شتاب کوریولیس به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M = \begin{bmatrix} m \times I_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & I \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \omega_B \times (mV_B) \\ \omega_B \times (I\omega_B) \end{bmatrix}$$

که در آن ω_B و V_B به ترتیب بردار سرعت زاویه‌ای و سرعت خطی در مختصات محلّی هستند، به طوری که $\omega_B = [\omega_x\ \omega_y\ \omega_z]^T$ و $V_B = [V_x\ V_y\ V_z]^T$.

دینامیک های فوق با کنترل‌کننده ی خطی‌سازی فیدبک کنترل می‌شوند:

$$u = \tau = M(x,p)\ddot{x}^* + C(x,\dot{x},p) \qquad (۲۳)$$

جایی که $\ddot{x}^*$ به این شکل انتخاب می‌شود:

$$\ddot{x}^* = \ddot{x}_d - k_v\dot{E} - k_pE \qquad (۲۴)$$

$\ddot{x}_d$ شتاب مطلوب حالت ها است و E و $\dot{E}$ خطای موقعیت و سرعت حالت را نشان می‌دهند:

$$E = x_d - x \qquad (۲۵)$$

$$\dot{E} = \dot{x}_d - \dot{x} \qquad (۲۶)$$

K_v و K_p بهره هایی برای جانشین قطب های دینامیک‌های حلقه بستهٔ خطی در سمت چپ صفحهٔ مختصات هستند. بااین‌حال در رابطهٔ (۲۲) M و C نسبت به خطای پارامتری نامشخص‌اند و به‌صورت زیر تخمین زده خواهند شد:

$$\tau = \widehat{M}(x,\hat{p})\ddot{x}^* + \widehat{C}(x,\dot{x},\hat{p}) \qquad (۲۷)$$

$$\widetilde{M} = M - \widehat{M}$$

$$\widetilde{C} = C - \widehat{C} \qquad (۲۸)$$

$$\Phi = p - \hat{p} \qquad (۲۹)$$

Φ خطای تخمین پارامترهاست و با جایگذاری رابطه (۲۷) در (۲۲) داریم:

$$\widetilde{M}(x,\Phi)\ddot{x} + \widetilde{C}(x,\dot{x},\Phi) = \widehat{M}(x,\hat{p})(\ddot{x}_d - k_v\dot{E} - k_pE) \qquad (۳۰)$$

دینامیک‌های خطا:

$$(\ddot{E} - k_v\dot{E} - k_pE) = -\widehat{M}^{-1}\left(\widetilde{M}(x,\Phi)\ddot{x} + \widetilde{C}(x,\dot{x},\Phi)\right) \qquad (۳۱)$$

ماتریس‌های دینامیکی (رابطه (۲۲)) با توجّه به پارامترهای p خطی هستند. بنابراین، دینامیک در جملات خطا می‌تواند به‌صورت رابطهٔ (۳۲) بازنویسی شود.

$$\widetilde{M}(x,\Phi)\ddot{x} + \widetilde{C}(x,\dot{x},\Phi) = W(x,\dot{x},\ddot{x})\Phi \qquad (۳۲)$$

جایی که W یک ماتریس غیرخطی است که دینامیک‌های خطا را در بر می‌گیرد. بنابراین، دینامیک‌های سیستم از رابطهٔ (۳۱) می‌تواند به‌صورت رابطهٔ (۳۳) نوشته شود:

$$\ddot{E} - k_v\dot{E} - k_pE = -\widehat{M}(x,\hat{p})^{-1}W(x,\dot{x},\ddot{x})\Phi \qquad (۳۳)$$

که می‌توان در رابطه (۳۲)، W را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$W(X,\dot{X},\ddot{X}) = \begin{bmatrix} \frac{-\ddot{z}+g}{\cos\theta\sin\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddot{\phi} & \dot{\theta}\,\dot{\psi} & -\dot{\theta}\,\dot{\psi} \\ 0 & -\dot{\phi}\dot{\psi} & \ddot{\theta} & \dot{\phi}\dot{\psi} \\ 0 & \dot{\theta}\,\dot{\phi} & -\dot{\theta}\,\dot{\phi} & \ddot{\psi} \end{bmatrix} \qquad (۳۴)$$

اگر رابطهٔ (۳۳) به‌صورت یک سیستم درجهٔ دو در نظر گرفته شود که سمت چپ آن ورودی u بوده و E خروجی سیستم باشد، یک تحقق از آن به‌صورت (۳۵) نوشته می‌شود که در آن A ماتریس هرویتز و زوج (A, C_1) رؤیت‌پذیر است. همچنین این تحقق به نحوی انتخاب می‌شود که لم کالمن-یاکوبوویچ-پوپوف را با تعریف خروجی جدید E_1 برآورده کند:

$$\dot{Z} = AZ + Bu, \quad u = -\widehat{M}^{-1}W\Phi$$
$$E = C_1Z \qquad (۳۵)$$

در تعریف خروجی جدید، Ψ پارامتر تنظیم است. رابطهٔ خروجی جدید به صورت (۳۷) به دست خواهد آمد:

$$E_1 = \dot{E} + \Psi E \qquad (۳۶)$$

$$E_1 = CZ \qquad (۳۷)$$

لم کالمن-یاکوبوویچ-پوپوف بیان می‌کند که تحقق مورد نظر به نحوی است که در روابط زیر صدق می‌کند

به‌نحوی که ماتریس های P, Q ماتریس های مثبت معیّن هستند.

$$A^TP + PA = -Q \quad (۳۸)$$

$$PB = C^T \quad (۳۹)$$

انتخاب تابع لیاپانوف که در آن Γ مثبت بوده و بهره‌ی تطبیق است، به‌صورت زیر است:

$$V = Z^TPZ + \Theta^T\Gamma^{-1}\Theta \quad (۴۰)$$

با مشـــتق گیری از رابطهٔ بالا و با اســـتفاده از لم کالمن-یاکوبوویچ-پوپوف:

$$\dot{V} = \dot{Z}^TPZ + Z^TP\dot{Z} + 2\Theta^T\Gamma^{-1}\dot{\Theta} \quad (۴۱)$$

$$\dot{V} = (AZ + Bu)^TPZ + Z^TP(AZ + Bu) + 2\Theta^T\Gamma^{-1}\dot{\Theta}$$

$$\dot{V} = Z^TA^TPZ + u^TB^TPZ + Z^TPAZ + Z^TPBu + 2\Theta^T\Gamma^{-1}\dot{\Theta}$$

$$\dot{V} = -Z^TQZ + 2u^TE_1 + 2\Theta^T\Gamma^{-1}\dot{\Theta}$$

$$\dot{V} = -Z^TQZ + 2\left(-\widehat{M}^{-1}W\Theta\right)^TE_1 + 2\Theta^T\Gamma^{-1}\dot{\Theta}$$

$$\dot{V} = -Z^TQZ - 2\Theta^TW^T\widehat{M}^{-1}E_1 + 2\Theta^T\Gamma^{-1}\dot{\Theta}$$

و با انتخاب قانون تطبیق به‌صورت زیر:

$$\dot{\Theta} = \Gamma W^T\widehat{M}^{-1}E_1 \quad (۴۲)$$

م شتق تابع لیاپانوف در رابطهٔ (۳۷) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{V} = -Z^TQZ \quad (۴۳)$$

که رابطهٔ (۴۳) به ازای Q مثبت معین، منفی نیمه-معیّن خوا هد بود؛ و با تو جّه به این‌که $\Theta = p - \hat{p}$ بـنابراین $\dot{\Theta} = -\dot{\hat{p}}$. لذا، یک قانون تطبیق مـناســـب به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{\hat{p}} = -\Gamma W^T\widehat{M}^{-1}E_1 \quad (۴۴)$$

کنترل خطی‌ســـازی فیدبک تطبیقی برای کوادروتور گام متغیر. با توجّه به دینامیک‌های کوادروتور، می‌توان دینامیک‌های قابل خطی‌ســـازی فیدبک را برای حالت کوادروتور $x^q = [Z\ \phi\ \theta\ \psi]^T$ به دست آورد.

$$\tau = M^q\left(x^q, p^q\right)\ddot{x}^{q*} + C^q\left(x^q, \dot{x}^q, p^q\right) \quad (۴۵)$$

$$\tau^q = \begin{bmatrix} u^q \\ \tau_\varphi{}^q \\ \tau_\theta{}^q \\ \tau_\psi{}^q \end{bmatrix}$$

$$M^q(x, p^q) = \begin{bmatrix} -\frac{m}{c\theta c\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

$$C^q(x^q, \dot{x}^q, p^q) = \begin{bmatrix} \frac{mg}{c\theta c\phi} \\ \dot{\theta}\dot{\psi}\left(I_y - I_z\right) \\ \dot{\phi}\dot{\psi}\left(I_z - I_x\right) \\ \dot{\varphi}\dot{\theta}\left(I_x - I_y\right) \end{bmatrix}$$

بردار پارامترهای ناشـــناخته به‌صـــورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\hat{p}^q = \begin{bmatrix} p_1^q \\ p_2^q \\ p_3^q \\ p_4^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix} \quad (۴۶)$$

انتخاب $\hat{p}$ ت ضمین می‌کند که سی ستم رابطهٔ (۴۵) در پارامترها، خطی اســـت. هدف کلّی این کنترل‌کننده کاهش خطای ردیابی است.

متغیر $W(x, \dot{x}, \ddot{x})$ به‌صورت زیر تعریف شده است،

$$W(\ddot{x}^q, \dot{x}^q, x^q) = \begin{bmatrix} \frac{-\ddot{Z}+g}{c\theta c\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddot{\phi} & \dot{\theta}\dot{\psi} & -\dot{\theta}\dot{\psi} \\ 0 & -\dot{\phi}\dot{\psi} & \ddot{\theta} & \dot{\phi}\dot{\psi} \\ 0 & \dot{\theta}\dot{\phi} & -\dot{\theta}\dot{\phi} & \ddot{\psi} \end{bmatrix} \quad (۴۷)$$

بنـابراین، قـانون تطبیق پـارامتر برای کوادروتور به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{\hat{p}}^q = -\Gamma W^T\widehat{M}^{q^{-1}}E_1 \quad (۴۸)$$

جایی که بهره تطبیق Γ و خروجی E_1 به ترتیب در رابطه های (۳۶) و (۴۰) تعریف شـــده‌اند. این قانون تطبیق پارامتر، همراه با قانون کنترل در رابطهٔ (۴۵)، می توانـد برای تثبیـت دینـامیـک هـای کوادروتور بـا پارامترهای نامعین جرم و اینرسی استفاده شود.

نتایج شبیه‌سازی

نتایج شبیه‌سازی کنترل خطی‌سازی فیدبک و خطی سازی فیدبک تطبیقی برای کوادروتور گام متغیر

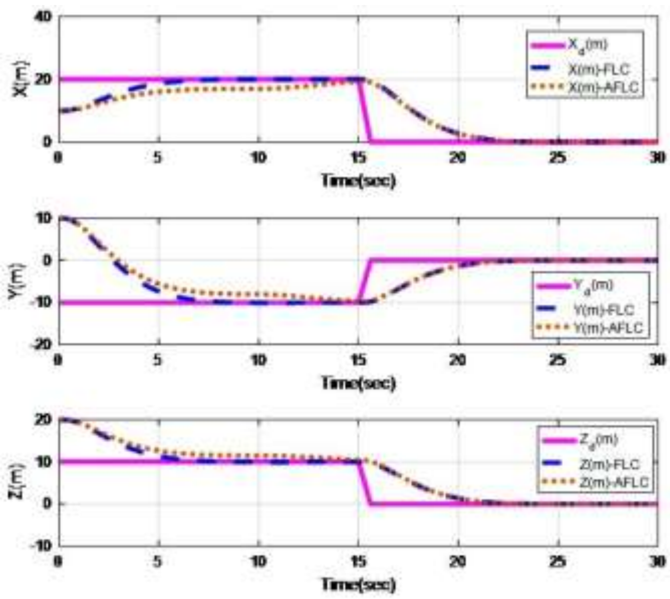
در این بخش نتایج شبیه سازی کنترل‌کننده خطی سازی فید بک و کنترل‌کنندهٔ خطی‌سازی فید بک تطبیقی کوادروتور گام متغیر ارائه می‌شود. جدول (۱) نشان‌دهندهٔ پارامترهای استفاده شده برای کوادروتور گام متغیر است.

در شکل های (٤)، (٥)، (٦) و (٧) به ترتیب نمودارهای مربوط به کنترل موقعیت، وضعیت کوادروتور، ورودی های کنترلی و نمایش سه‌بعدی ردیابی مسیر توسط کنترل خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل‌های (٤) و (٥) دیده می‌شود ردیابی توسط هر دو کنترل‌کنندهٔ به‌خوبی صورت گرفته است.

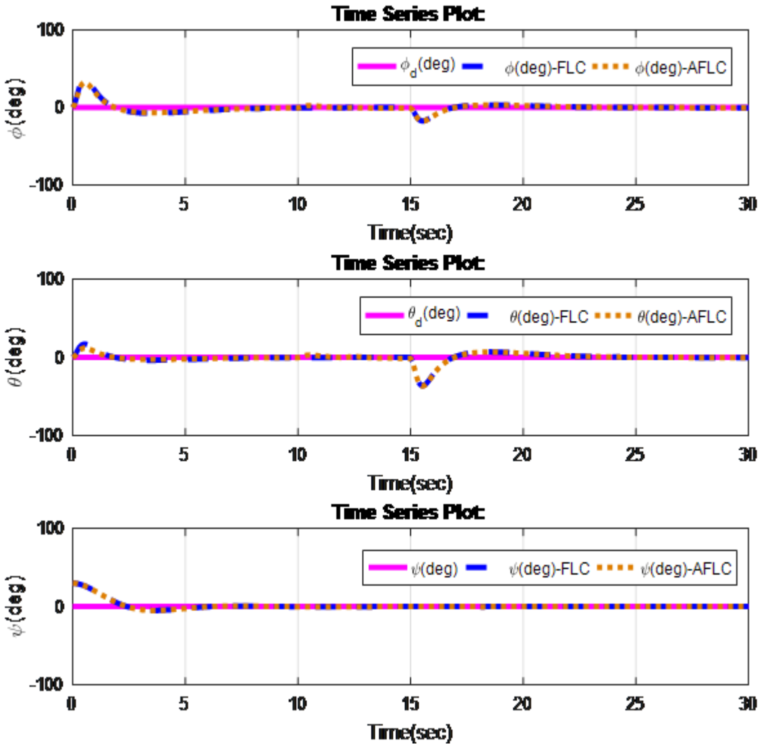
برای مقایسه‌ی بهتر عملکرد کنترل‌کنندهٔ تطبیقی و نمایان شدن مزیت آن نسبت به حالت استاندارد در میانهٔ حرکت (زمان ۱۵ ثانیه)، جرم جسم از ۲,۵ کیلوگرم به ۱,۵ کیلوگرم کاهش داده شده و با توجّه به شکل‌های (۸) تا (۱۱) که به ترتیب نمایان‌گر نتایج ردیابی موقعیت، وضعیت، ورودی‌های کنترلی و حرکت سه‌بعدی مشاهده می‌گردد که کنترل‌کنندهٔ خطی سازی فیدبک عملکرد مناسبی ندارد و سیستم خطای زیاد دارد که به واگرایی نیز نزدیک می‌گردد ولی در حالت کنترل خطی‌سازی فیدبک تطبیقی با تخمین نامعینی، کنترل اصلاح‌شده و ردیابی به‌خوبی انجام می‌شود.

جدول (۱): پارامترهای استفاده شده برای کوادروتور گام متغیر

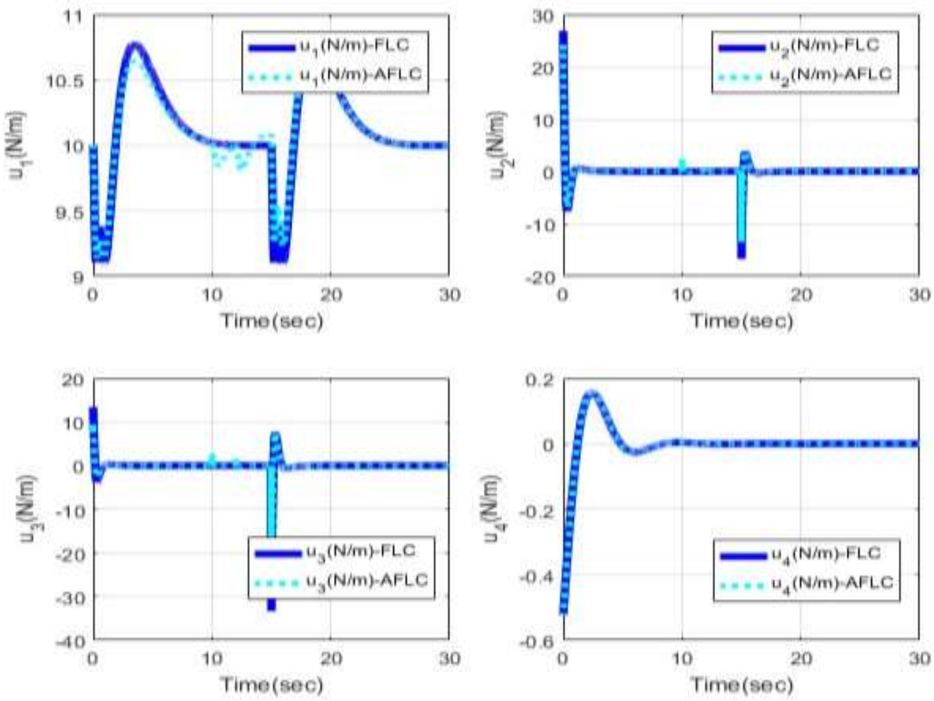
پارامتر	مقدار
m	2.5 kg
R	0.18 m
c	0.03 m
d	0.3 m
c_{l_α}	5.23
N_b	2
Ω	282.7 rad/sec
I_x	2×10^{-3} kg.m^2
I_y	2×10^{-3} kg.m^2
I_z	2×10^{-3} kg.m^2
g	9.81(m/s^2)



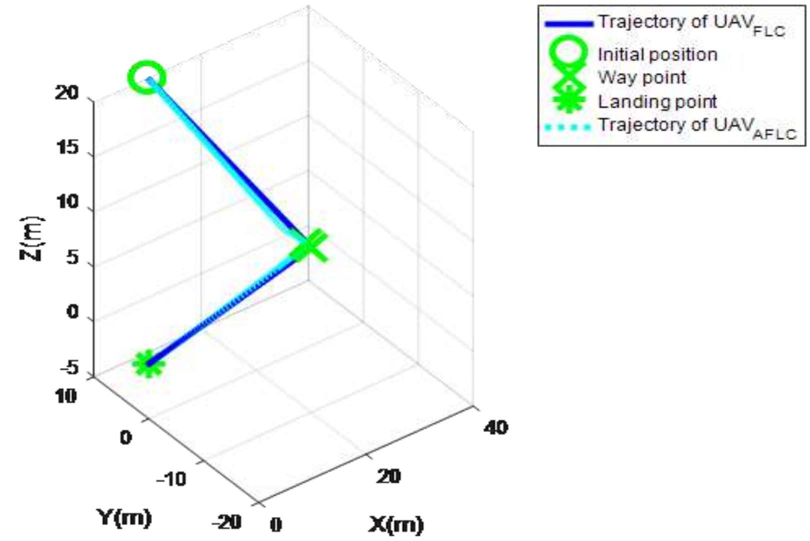
شکل ٤ ردیابی موقعیت با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی



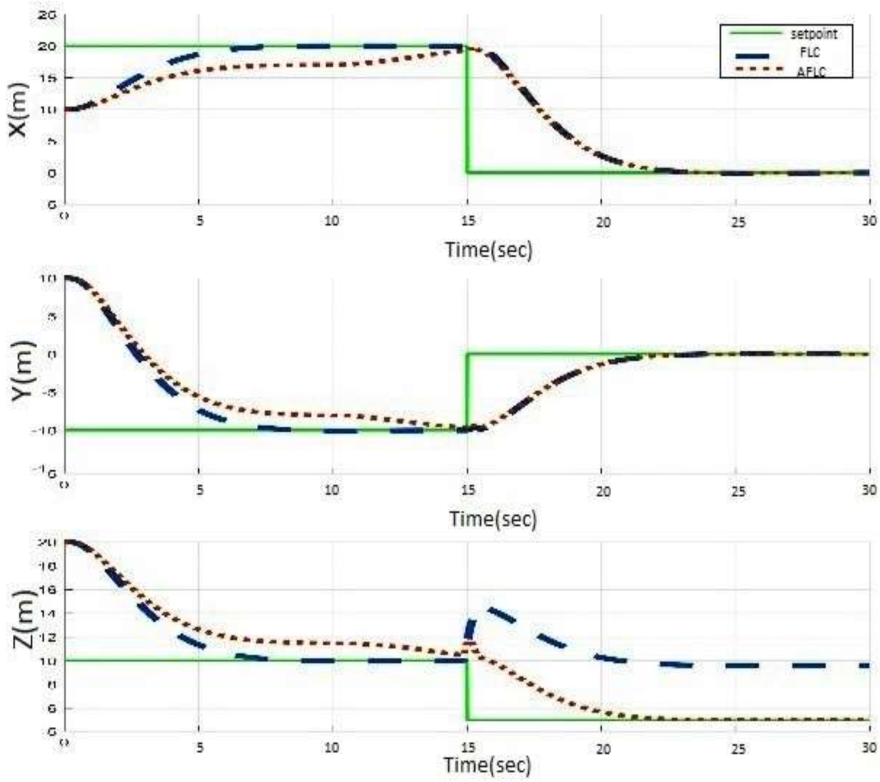
شکل (۵): ردیابی وضعیت با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی



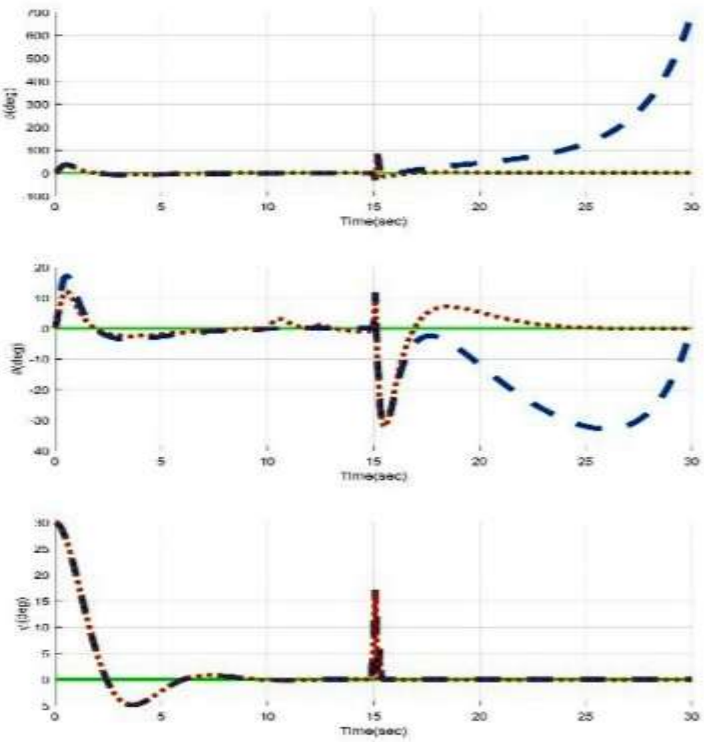
شکل (٦): ورودی‌های کنترلی با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی



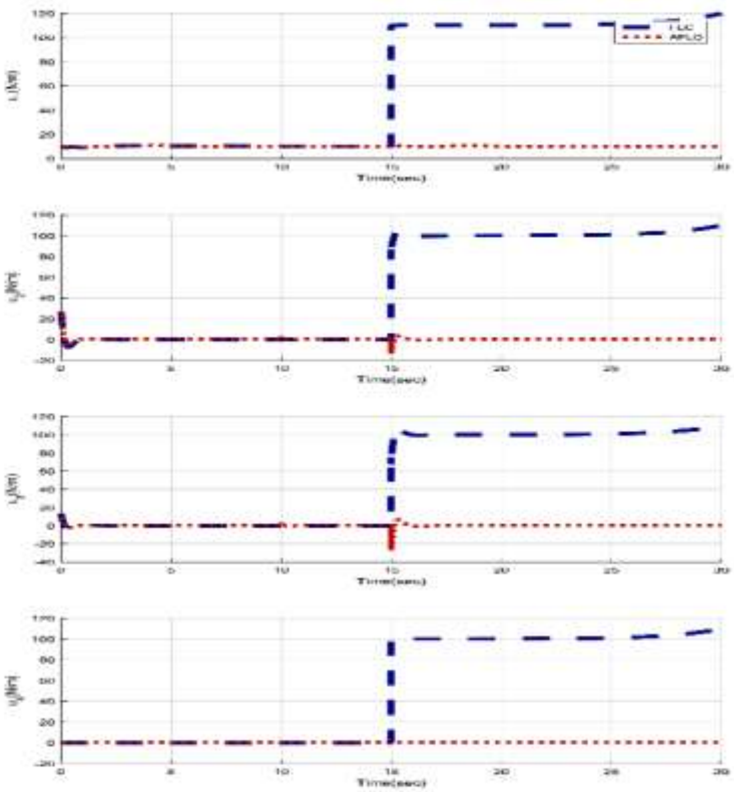
شکل (۷): مسیر کوادروتور در حالت سه‌بعدی با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی



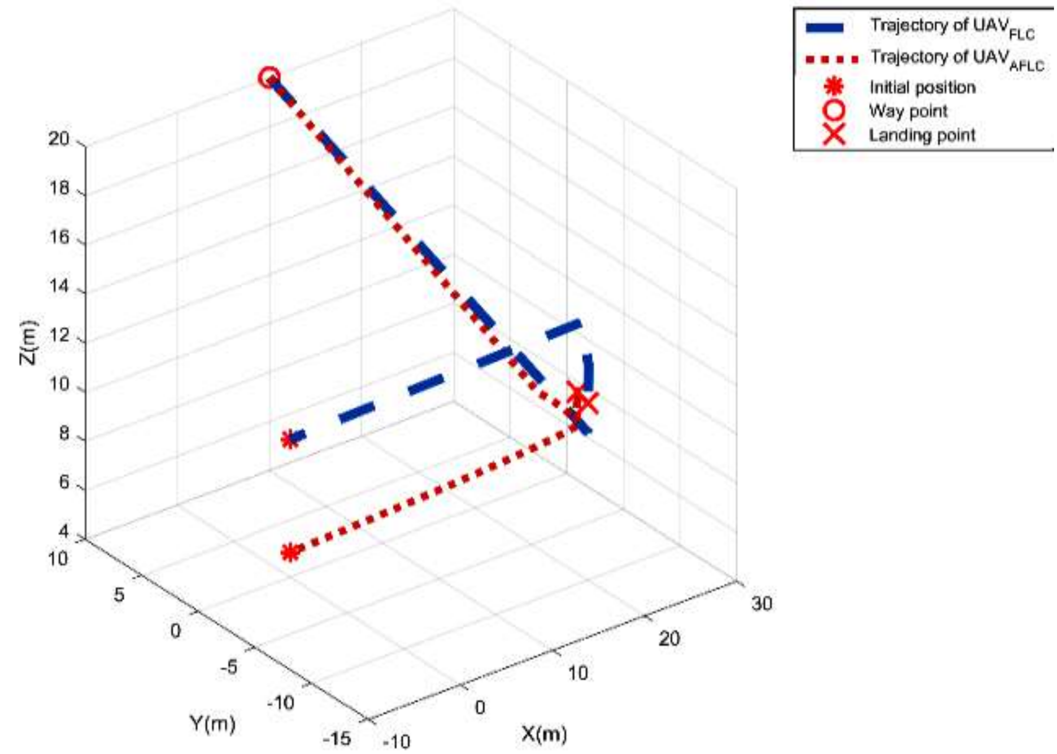
شکل (۸): ردیابی موقعیت با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی با تغییر در جرم جسم



شکل (۹): ردیابی وضعیت با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی با تغییر در جرم جسم



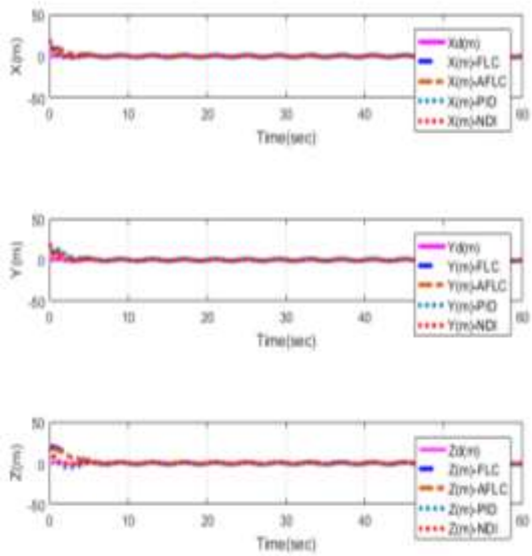
شکل (۱۰): ورودی‌های کنترلی با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی با تغییر در جرم جسم



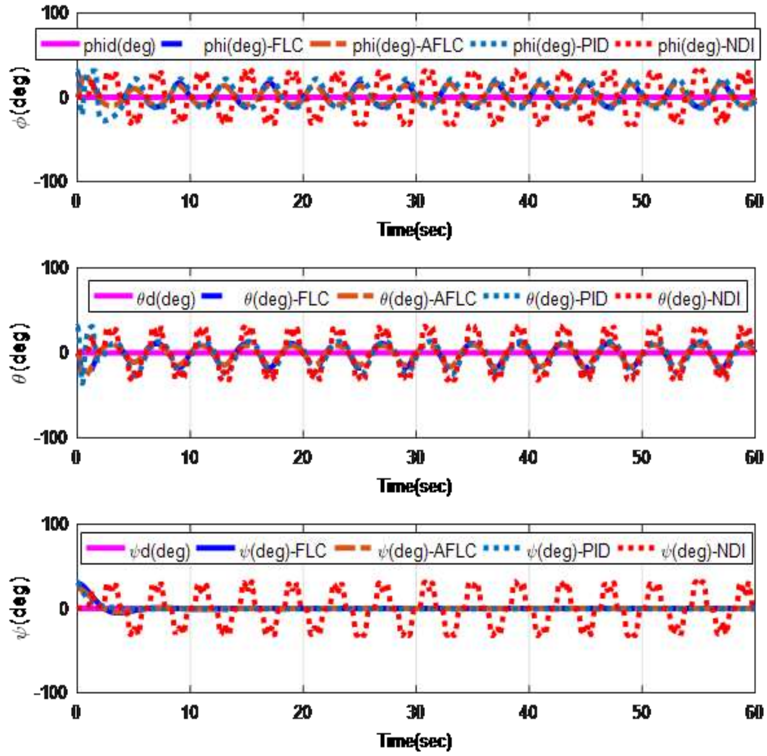
شکل (۱۱): مسیر کوادروتور در حالت سه‌بعدی با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی با تغییر در جرم جسم

مقایسهٔ نتایج شبیه‌سازی با کنترل‌کننده‌های PID و دینامیک معکوس غیرخطی

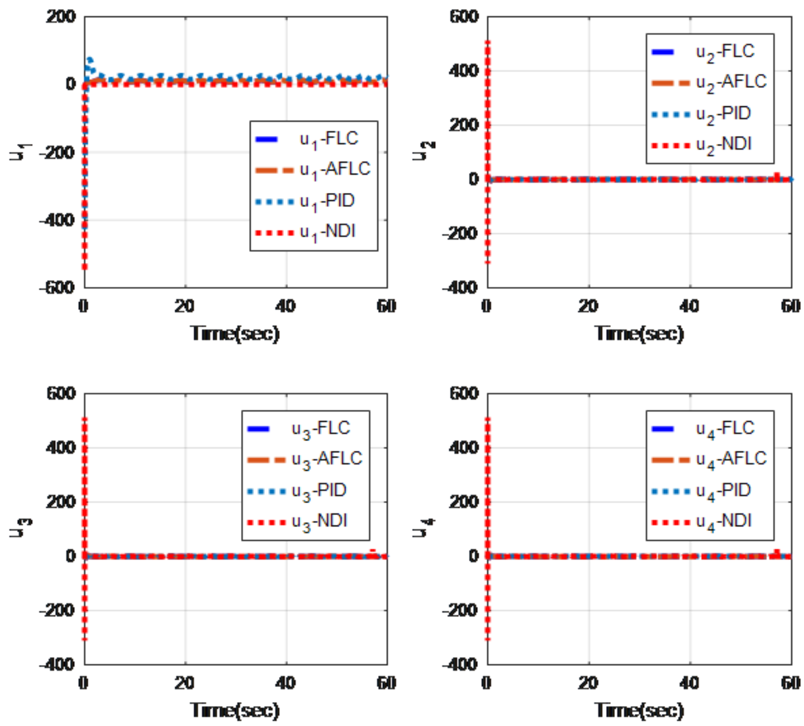
در این بخش جهت بررسی بهتر عملکرد کنترل‌کننده‌های طراحی شده، نتایج شبیه سازی با نتایج کنترل‌کننده‌های PID و NID [2] مقایسه شده‌اند. در شکل های (۱۲) تا (۱٤) به ترتیب ردیابی موقعیت، وضعیت، ورودی‌های کنترلی کوادروتور گام متغیر با کنترل‌کننده های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی و PID و NID (دینامیک معکوس غیرخطی) نشان داده شده است. مشاهده می شود که کنترل‌کننده های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی عملکرد بهتری نسبت به کنترل‌کننده‌های PID و NID دارند.



شکل (۱۲): ردیابی موقعیت با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی و کنترل‌کننده‌های PID و NID



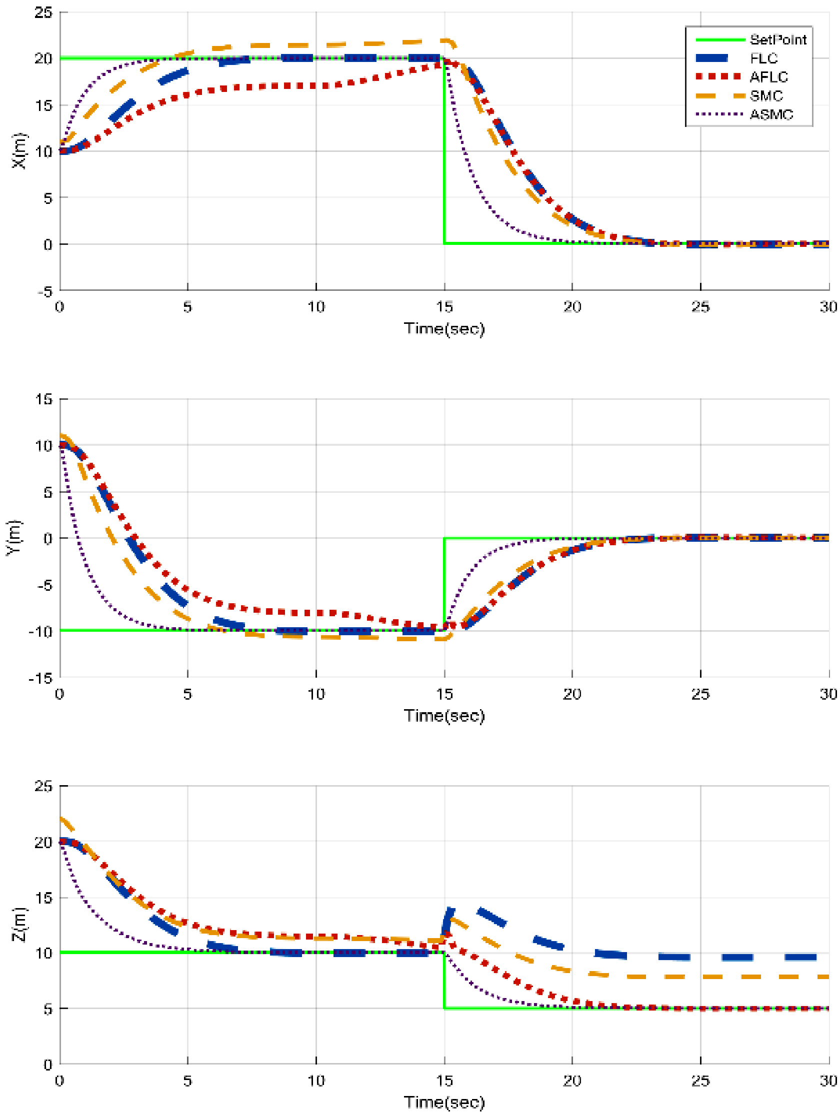
شکل (۱۳): ردیابی ۱ وضعیت با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی و کنترل‌کننده‌های PID و NID



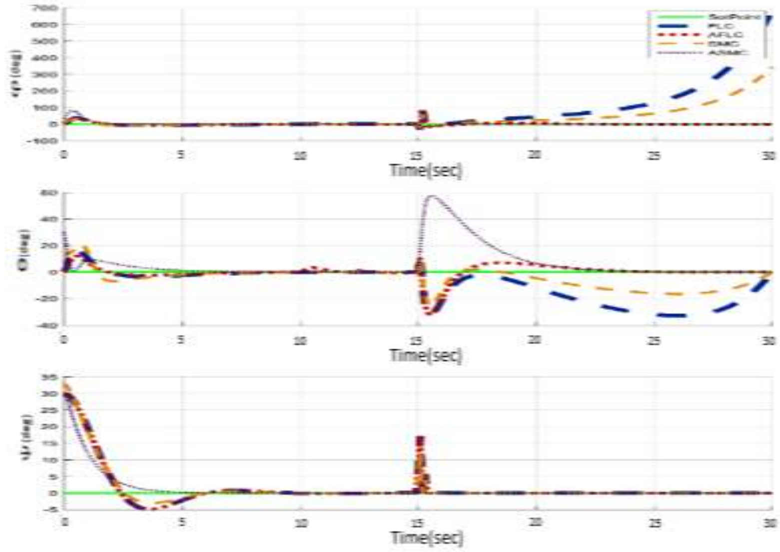
شکل (١٤): ورودی‌های کنترلی با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی و کنترل‌کننده‌های PID و NID

مقایسهٔ نتایج شبیه‌سازی با کنترل‌کننده‌های مدلغزشی و مدلغزشی تطبیقی

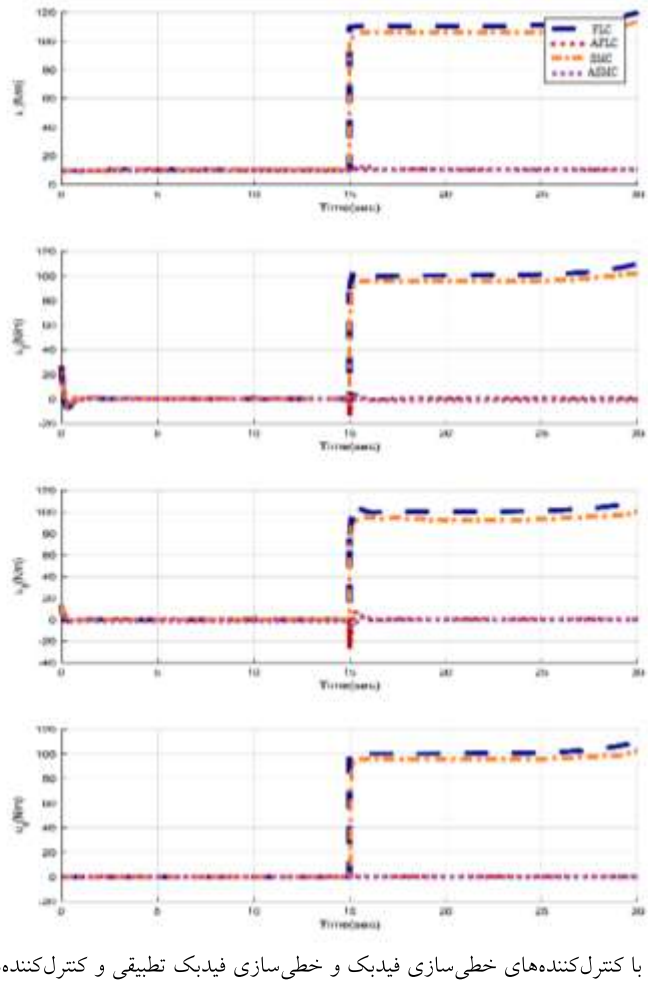
در این بخش جهت بررسی بهتر عملکرد کنترل‌کننده‌های طراحی‌شده، نتایج شبیه‌سازی در حالتی که جرم جسم در میانهٔ حرکت از ۲٫۵ کیلوگرم به ۱٫۵ کیلوگرم کاهش یافته است با نتایج کنترل‌کننده‌های مدلغزشی و مدلغزشی تطبیقی مقایسه شده‌اند. در شکل‌های (۱۵) تا (۱۷) به ترتیب ردیابی موقعیت، وضعیت، ورودی‌های کنترلی کوادروتور گام متغیر با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی و مد لغزشی و مد لغزشی تطبیقی نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک تطبیقی و مدلغزشی تطبیقی عملکرد بهتری نسبت به کنترل‌کننده‌های خطی سازی فیدبک و مدلغزشی دارند.



شکل (۱۵): ردیابی موقعیت با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی و کنترل‌کننده‌های مد لغزشی و مد لغزشی تطبیقی با تغییر در جرم جسم



شکل (۱٦): ردیابی وضعیت با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی و کنترل‌کننده‌های مد لغزشی و مد لغزشی تطبیقی با تغییر در جرم جسم



شکل (۱۷): ورودی‌های کنترلی با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی و کنترل‌کننده‌های مد لغزشی و مد لغزشی تطبیقی با تغییر در جرم جسم

نتیجه‌گیری

در این مقاله به تجزیه‌وتحلیل و کنترل پرواز یک کوادروتور گام متغیر پرداخته شد. در مقایسه با یک کوادروتور گام ثابت، این قابلیت‌ها تا حدٍّ زیادی امکان مانورهای تهاجمی و آکروباتیک را افزایش می‌دهد که نشان‌دهندهٔ بهبود عملکرد نسبت به کوادروتور گام ثابت است.

در ادامهٔ این مقاله کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی مستقیم معرفی شد. کنترل‌کننده خطی‌سازی فیدبک طراحی‌شده عملکرد خوبی داشته و ردیابی موقعیت و وضعیت کوادروتور گام متغیر با استفاده از این کنترل‌کننده به‌درستی صورت گرفته است. کنترل‌کنندهٔ خطی‌سازی فیدبک مستقیم معرفی شده نیز به‌طور خودکار پارامترها را برای دستیابی به ردیابی دقیق، تغییر می‌دهد. با استفاده از نظریه لیاپانف ثابت شده است که این کنترل‌کننده پایدار است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که اتخاذ این راهبرد تطبیقی اجازه می‌دهد تا کوادروتور جهت‌گیری‌های زمان متغیر و دستورات ارتفاع را به‌طور دقیق‌تری، در حضور اغتشاشات و یا خطاهای پارامتر، در مقایسه با کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک غیر تطبیقی، دنبال کند. رویکرد تطبیقی نیز نتایج مطلوبی برای ردیابی موقعیت و وضعیت کوادروتور گام متغیر داشته است. در آخر نیز نتایج حاصل از کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی با کنترل‌کننده‌های PID مقایسه شده است که مشاهده می‌شود کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی دارای عملکرد بهتری در ردیابی مسیر مرجع و کاهش خطای ردیابی هستند و همچنین نتایج حاصل از کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک و خطی‌سازی فیدبک تطبیقی با کنترل‌کننده‌های مدلغزشی و مد لغزشی تطبیقی نیز در شرایط تغییر جرم کوادروتور مقایسه شده است که مشاهده می‌شود کنترل‌کننده‌های خطی‌سازی فیدبک تطبیقی و مدلغزشی تطبیقی، دقت بالایی در ردیابی مسیر مرجع داشته و خطای ردیابی موقعیت و وضعیت خیلی کمی دارند که نشان می‌دهد عملکرد بهتری نسبت به حالت غیر تطبیقی داشته‌اند.

واژه نامه

تنظیم فیدبک مرجع مجازی	Virtual Reference Feedback Tuning
تنظیم بر اساس همبستگی	Correlation – Based Tuning
تناسبی- مشتقی	Proportional Derivative
تنظیم کننده درجه دو خطی	Linear Quadratic Regulator
تناسبی- انتگرالی- مشتقی	Proportional-Integral-Derivative
دینامیک معکوس غیرخطی	Nonlinear Inverse Dynamics
شش درجه آزادی	Six Degrees of Freedom
رول، پیچ، یاو	Roll, Pitch, Yaw

مراجع

1. Cutler, M., Ure, N. K., Michini, B., and How, J. "Comparison of fixed and variable pitch actuators for agile quadrotors", *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, pp. 6406, (2011).

2. Cutler, M. J., "Design and control of an autonomous variable-pitch quadrotor helicopter", Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Department of Aeronautics and Astronautics, (2012).
3. Cutler, M., and How, J."Actuator constrained trajectory generation and control for variable-pitch quadrotors" *In AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, pp. 4777, (2012).
4. Kawasaki, K., Zhao, M., Okada, K., and Inaba, M."MUWA: Multi-field universal wheel for air-land vehicle with quad variable-pitch propellers", *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1880-1885. IEEE, (2013).
5. Panizza, Pietro, Davide Invernizzi, Fabio Riccardi, Simone Formentin, and Marco Lovera. "Data-driven attitude control law design for a variable-pitch quadrotor", *American Control Conference (ACC)*, pp. 4434-4439. IEEE, (2016).
6. Riccardi, F., and Marco, L., "Robust attitude control for a variable-pitch quadrotor", *IEEE Conference on Control Applications (CCA), IEEE*, (2014).
7. Invernizzi, D., Panizza, P., Riccardi, F., Formentin, S., & Lovera, M. "Data-driven attitude control law of a variable-pitch quadrotor: a comparison study", *IFAC-Papers OnLine*, Vol. 49, No. 17, pp. 236-241, (2016).
8. Riccardi, Fabio, Muhammad Farooq Haydar, Simone Formentin, and Marco Lovera. "Control of variable-pitch quadrotors." *IFAC Proceedings*, Vol. 46, No. 19, pp. 206-211, (2013).
9. Pang, Tao, Kemao Peng, Feng Lin, and Ben M. Chen. "Towards long-endurance flight: Design and implementation of a variable-pitch gasoline-engine quadrotor." *12th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, pp. 767-772. IEEE, (2016).

۱۰. مدیر روستا، ع. و خدابنده، م.، «طراحی یک روش کنترل مد لغزشی انتگرالی تطبیقی برای پایدارسازی زمان محدود و مقاوم پرنده چهارملخه»، مجله مهندسی برق تبریز، دوره ٤٦، شماره ۱، صفحات ۳۲۱-۳۳۲. (بهار ۱۳۹۵).

۱۱. وحدانی‌پور، م. و خدابنده، م.، «کنترل مد لغزشی مبتنی بر روش برگشت به عقب کوادروتور با حذف اثر اغتشاش بار و تخمین اینرسی به روش تطبیقی»، مجله مهندسی برق تبریز، دوره ٤٧، شماره ۲، صفحات ۷۷۵-۷۸۳. (تابستان ۱۳۹٦).

12. Benallegue, A., Mokhtari, A., and Fridman, L., "Feedback linearization and high order sliding mode observer for a quadrotor UAV", *In International Workshop on Variable Structure Systems*, VSS'06, pp. 365-372, IEEE, (2006).
13. Shulong, Z., Honglei, A., Daibing, Z. and Lincheng, S., “A new feedback linearization lqr control for attitude of quadrotor”, *13th International Conference on Control Automation Robotics & Vision (ICARCV)*, pp. 1593-1597, IEEE, (2014).

14. Cömert, C., and Coşku, K., "Comparing and Developing PID and Sliding Mode Controllers for Quadrotor", *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*, Vol.6, No. 3, pp. 194-199, (2017).
15. Bouabdallah, S., and Roland, S., "Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor", *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2247-2252, IEEE, (2005).
16. Madani, T., and Abdelaziz, B., "Backstepping control for a quadrotor helicopter", *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 3255-3260, IEEE, (2006).
17. Dydek, Z., Anuradha, A., and Eugene, L., "Combined/composite adaptive control of a quadrotor UAV in the presence of actuator uncertainty", *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, pp. 7575, (2010).
18. Lee, D., Jin Kim, H, and Shankar, S., "Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter", *International Journal of Control, Automation and Systems*, Vol. 7, No.3, pp. 419-428, (2009).
19. Das, A., Kamesh, S., and Frank, L., "Dynamic inversion with zero-dynamics stabilisation for quadrotor control", *IET Control Theory & Applications*, Vol. 3, No. 3, pp. 303-314, (2009).
20. Ghandour, J., Samir, A., and Jean-Christophe, P., "Feedback linearization approach for standard and fault tolerant control: Application to a quadrotor UAV testbed", *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 570, No. 8, IOP Publishing, (2014).
21. Cutler, M., and Jonathan P. H., "Analysis and control of a variable-pitch quadrotor for agile flight", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 137, No. 10, (2015).
22. Abhishek, R.G., Duhoon, A., Kothari, M., Kadukar, S., Rane, L. and Suryavanshi, G. "Design, Development, and Closed-loop Flight-Testing of a Single Power Plant Variable Pitch Quadrotor Unmanned Air Vehicle", *Proceedings of 73rd American Helicopter Society Annual Forum*, pp. 9-11, (2017).
23. Gupta, N. and Kothari, M., "Flight dynamics and nonlinear control design for variable-pitch quadrotors", *American Control Conference (ACC)*, pp. 3150-3155. IEEE, (2016).
24. Gupta, N. and Kothari, M.,"Modeling and Control of Inverted Flight of a Variable-Pitch Quadrotor", arXiv preprint arXiv: 1709.06407, (2017).
25. Chipade, V.S., Abhishek, A. and Kothari, M.,"Advanced Flight Dynamic Modelling of Variable Pitch Quadrotor", *2018 AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, pp. 1763, (2018).
26. Pretorius, A., and Edward, B., "Design and modelling of a quadrotor helicopter with variable pitch rotors for aggressive manoeuvres*", IFAC Proceedings* Vol. 47, No. 3, pp. 12208-12213, (2014).

27. Cutler, M.J., "Design and control of an autonomous variable-pitch quadrotor helicopter", Diss. Massachusetts Institute of Technology, Department of Aeronautics and Astronautics, (2012).
28. Fresk, E.,"Modeling, control and experimentation of a variable pitch quadrotor", Master thesis, Department of Computer science, Electrical and Space Engineering, Luleå University of Technology, Sweden, (2013).
29. Simha, A., Sharvaree, V., and Smyendu, R., "Almost-Global Exponential Tracking of a Variable Pitch Quadrotor on SE (3)", *IFAC-PapersOnLine 50*, No. 1, pp.10268-10273, (2017).
30. Fang, Z., Zhi, Z., Jun, L. and Jian, W., "Feedback linearization and continuous sliding mode control for a quadrotor UAV", *27th Chinese Control Conference, CCC 2008*, pp. 349-353, IEEE, (2008).
31. Mukherjee, P. and Waslander, S.,"Direct adaptive feedback linearization for quadrotor control", *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, pp. 4917, (2012).
32. Shastry, A. K., Pattanaik, A., and Kothari, M., "Neuro-adaptive Control for Quadrotors", *Proceedings of the Fourth International Conference on Advances in Control and Optimization of Dynamical Systems (ACODS 2016)*, Tiruchirappalli, India, *IFAC-PapersOnLine*, Vol. 49, No. 1, pp.302-307 (2016).